

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина  
Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

# **МЕТОД ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Методические указания  
для практических занятий и самостоятельной работы студентов  
направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»  
09.03.04 «Программная инженерия»  
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»  
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение  
машиностроительных производств»  
18.03.01 «Химическая технология»  
23.03.01 «Нефтегазовое дело»  
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

**Электронное издание комбинированного распространения**

*Одобрено  
редакционно-издательским советом  
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.*

Энгельс 2024 г

## ВВЕДЕНИЕ

Математические модели многих задач в естественных науках и технике содержат дифференциальные уравнения с частными производными. Такие уравнения принято называть уравнениями математической физики. Большой интерес для приложений представляют линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Методы решения для этих уравнений изучены достаточно хорошо. К таким методам относится метод Фурье – метод разделения переменных. С его помощью успешно решаются динамические задачи, в которых приходится работать с уравнениями гиперболического типа. Примером таких задач служат колебания в стержневых системах, подробно рассмотренные в работе [1]. Метод Фурье применяется также при решении задач теплопроводности [2] для установившихся процессов (уравнения эллиптического типа) и для нестационарных задач (уравнения параболического типа).

Уравнения с частными производными могут иметь бесконечно много линейно независимых частных решений. Этим они отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения линейных задач математической физики получают через суперпозицию таких частных решений. При этом в случае бесчисленного множества линейно независимых частных решений возникают интегралы, содержащие параметр. Если же множество частных решений счетное, то искомое решение задачи представляется через функциональный ряд. Данные методические указания содержат задачи, в решениях которых присутствуют функциональные ряды. При этом предполагается, что ряды имеют непрерывные суммы. Будем также полагать, что все встречающиеся

в решении ряды можно необходимое число раз дифференцировать почленно.

## 1. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим прямолинейный стержень длины  $l$  с постоянным поперечным сечением площади  $S$ . Материал стержня однородный с плотностью  $\rho$ . Условия закрепления и нагружения стержня таковы, что реализуется одноосное растяжение-сжатие [3]. При резком изменении величины внешней нагрузки стержень выходит из состояния покоя и начинает совершать свободные продольные колебания. Выведем уравнение, которое описывает эти колебания.

Свяжем со стержнем декартову систему координат. Начало отсчета расположим в центре тяжести на левом конце стержня, координатную ось  $Ox$  направим вдоль геометрической оси стержня. Выделим участок стержня, проведя два поперечных сечения на расстояниях  $x$  и  $x + dx$  от начала отсчета. Рассмотрим равновесие выделенного участка под действием внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$ , действующих со стороны соседних участков стержня (рис.1), а также сил инерции.

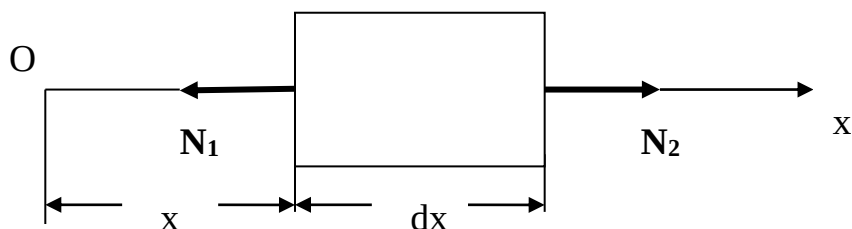


Рис.1

Приходим к уравнению вида

$$-N_1 + N_2 - \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $u(x,t)$  – осевое перемещение сечения стержня, зависящее от продольной координаты  $x$  и времени  $t$ . В рамках гипотез сопротивления материалов [3] распределение нормального напряжения  $\sigma$  по поперечному сечению стержня полагают равномерным, так что внутреннее осевое усилие  $N$  и напряжение  $\sigma$  связаны равенством

$$N = \sigma S. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma_2 - \sigma_1. \quad (3)$$

При условии, что материал стержня линейно упругий, связь между нормальным напряжением и осевой деформацией  $\varepsilon$  определяется законом Гука:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (4)$$

Через  $E$  в формуле (4) обозначена механическая характеристика материала – модуль упругости (модуль Юнга). В свою очередь осевая деформация связана с продольным перемещением соотношением вида

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

С учетом равенств (4) и (5) уравнение (2) принимает вид

$$\rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \left( \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Пренебрегая в правой части уравнения (6) бесконечно малыми величинами высших порядков, получим

$$\rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

и далее

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = E/\rho. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение свободных продольных колебаний упругого стержня.

К уравнению (7) следует добавить начальные и граничные условия. Начальные условия имеют вид

$$u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x).$$

Здесь  $f, g$  – заданные функции аргумента  $x$ , которые определяют соответственно перемещения и скорости поперечных сечений стержня в момент начала колебаний. Вид граничных условий зависит от способа закрепления и нагружения концов стержня.

В качестве примера рассмотрим стержень, у которого левый конец зашпелен, а к правому концу приложена осевая сила (рис.2). Стержень находится в состоянии покоя.

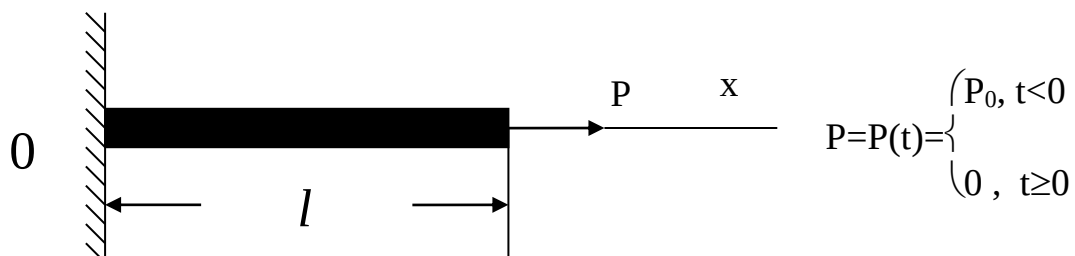


Рис.2

В некоторый момент времени, принятый за начальный, действие силы мгновенно прекращается. Стержень начинает совершать свободные колебания, которые описываются уравнением (7). Начальные условия имеют вид

$$u(x,0)=\frac{Px}{ES}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0. \quad (8)$$

Так как левый конец стержня закреплён, то

$$u(0,t)=0. \quad (9)$$

Правый конец стержня во время колебаний свободен от закреплений и внешних нагрузок, так что

$$N=0 \text{ при } x=l.$$

С учетом равенств (2), (4) и (5) последнее граничное условие можно представить в виде

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0. \quad (10)$$

Решение краевой задачи (7)-(10) проведем методом Фурье [4].

Представим искомое решение в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в уравнение (7), получим после разделения переменных

$$\frac{T''}{a^2T} = -\frac{X''}{X}.$$

Последнее равенство должно выполняться для всех значений  $t>0$  и  $0<x<l$ .

Это возможно, если

$$\frac{T''}{a^2T} = -\frac{X''}{X} = C, \text{ где } C=\text{const}. \quad (12)$$

Тогда для определения  $X(x)$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X'' - CX = 0. \quad (13)$$

К уравнению (13) следует добавить граничные условия

$$X(0)=0 \text{ и } X'(0)=0, \quad (14)$$

полученные соответственно из условий (9) и (10). При значениях  $C \geq 0$  задача (13), (14) имеет единственное решение

$$X(x)=0,$$

но тогда выражение (11) не задает перемещения при колебаниях. Значит, следует положить  $C = -\lambda^2$ . Тогда задача (13), (14) имеет множество решений

$$X_k(x) = D_k \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = (k + 1/2)\pi/l \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Величины  $\lambda_k$  называются собственными числами, а  $X_k(x)$  – собственными функциями задачи (13), (14).

*Упражнение 1: Показать, что система собственных функций (15) является ортогональной на отрезке  $[0; l]$ , то есть*

$$\int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

Для определения функции  $T(t)$  имеем на основании уравнений (12) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'' + (\lambda_k a)^2 T = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

общее решение которого имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos(\lambda_k a t) + B_k \sin(\lambda_k a t) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

С учетом выражений (11), (15) и (16) искомое решение будет представлено в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(\lambda_k a)t + b_k \sin(\lambda_k a)t] \sin \lambda_k x. \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в начальные условия (8), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \lambda_k x = \frac{Px}{ES} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\lambda_k a) \sin \lambda_k x = 0.$$

Последние равенства в силу ортогональности системы собственных функций (15) можно рассматривать как разложения в ряды Фурье. Тогда

$$\begin{aligned} a_k &= (2P/ES) \int_0^l x \sin \lambda_k x dx = (2P/ES) \left[ x(-\cos \lambda_k x)/\lambda_k \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (-\cos \lambda_k x)/\lambda_k dx \right] = \\ &= (2P/ES \lambda_k^2) \sin(\lambda_k x) \Big|_{x=0}^{x=l} = (-1)^k (2P/ES \lambda_k^2) \quad \text{и} \quad b_k = 0 \quad (k=0,1,2,\dots). \end{aligned}$$

Окончательно получим решение задачи (7)-(10) в виде

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \frac{Pl}{ES} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} at \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x.$$

*Упражнение 2. Решить задачу о свободных продольных колебаниях упругого стержня при заданных начальных и граничных условиях; вариант определить предпоследней цифре номера зачетной книжки.*

$$2.1. \quad u(x,0) = -Px/ES, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0, \quad u'_x(l,t) = 0.$$

$$2.2. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0, \quad u'_x(l,t) = P/ES.$$

$$2.3. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u'_x(0,t) = P/ES, \quad u'_x(l,t) = P/ES.$$

$$2.4. \quad u(x,0) = -P(l-x)/ES, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u'_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

$$2.5. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = P/ES, \quad u(l,t) = 0.$$

$$2.6. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = Vt.$$

$$2.7. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = -Vt, \quad u(l,t) = 0.$$

$$2.8. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = A \sin(\omega t).$$

$$2.9. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0, \quad u'_x(l,t) = (P/ES) \sin(\omega t).$$

$$2.10. \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u'_x(0,t) = (P/ES) \sin(\omega t), \quad u(l,t) = 0.$$

## 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СТЕРЖНЕ

Рассмотрим прямолинейный стержень конечной длины  $l$ . Свяжем с ним декартову систему координат, расположив начало отсчета на левом торцевом сечении и направив ось  $Ox$  вдоль оси стержня. Материал стержня считаем однородным с плотностью  $\rho$ , коэффициентом теплопроводности  $k$  и удельной объемной теплоемкостью  $c$ . Боковая поверхность стержня теплоизолирована, так что теплообмен с окружающей средой происходит только через торцевые сечения. В стержне отсутствуют внутренние источники тепла. В каждый момент времени температуру во всех точках данного поперечного сечения полагаем одинаковой. Температура  $\theta(x,t)$  зависит тогда от продольной координаты  $x$  и времени  $t$  и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = k/c\rho. \quad (18)$$

Постоянную  $a$  называют коэффициентом температуропроводности.

К уравнению теплопроводности следует добавить начальное условие вида

$$\theta(x,t) = f(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l$$

и граничные условия для сечений  $x=0$ ,  $x=l$ .

Рассмотрим начальное и граничные условия следующего вида:

$$\theta(x,0) = \theta_0, \quad (19)$$

$$\theta(0,t) = M, \quad \frac{\partial \theta(l,t)}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

Здесь  $\theta_0$  и  $M$  – заданные константы. Граничные условия (20) соответствуют случаю, когда на левом торце стержня поддерживается постоянная температура, а правый торец теплоизолирован.

Представим искомое решение задачи теплопроводности (18)-(20) в виде

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)+\varphi(x).$$

Функцию  $\varphi(x)$  следует выбрать так, чтобы сделать граничные условия для функции  $X(x)$  однородными. При этом  $\theta(x,t)$  должно удовлетворять однородному уравнению (18). Это достигается, если

$$\varphi''(x)=0 \text{ при } 0<x<l; \quad \varphi(0)=M, \quad \varphi'(l)=0.$$

Последние условия будут выполнены, если положить  $\varphi(x)=ax+b$  при  $b=M$  и  $a=0$ . Приходим к выражению

$$\theta(x,t)=M+X(x)T(t). \quad (21)$$

Подставив его в уравнение (18), после разделения переменных получаем

$$\frac{T'}{a^2T} = -\frac{X''}{X}.$$

Так как последнее равенство должно выполняться для всех значений  $t>0$  и  $0<x<l$ , то

$$T'-C a^2T=0 \quad (22)$$

и

$$X''-CX=0,$$

где  $C=\text{const}$ . Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$T(t)=A\exp(Ca^2t).$$

Ни в одном поперечном сечении стержня температура не может с течением времени неограниченно возрастать, так что  $C=-\lambda^2$ . Тогда

$$T(t)=A\exp(-\lambda^2a^2t). \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение для определения функции  $X(x)$  принимает вид

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (24)$$

Уравнение (23) решается при граничных условиях

$$X(0)=0 \text{ и } X'(0)=0, \quad (25)$$

которые получаются при подстановке выражения (21) для температуры в граничные условия (20). Задача (24), (25) имеет множество решений

$$X_n(x) = B_n \sin \lambda_n x, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Здесь  $\lambda_n = (n+1/2)\pi/l$  – собственные числа задачи (24), (25), то есть допустимые значения параметра  $\lambda$ . Суммируя частные решения, которые получены при однородных граничных условиях, с учетом выражений (23) и (26) получим для решения задачи (18)-(20) следующее выражение

$$\theta(x, t) = M + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\lambda_n x) \exp(-\lambda_n^2 a^2 t).$$

Подставив теперь  $\theta(x, t)$  в начальное условие (19), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin((n+1/2)\pi x/l) = \theta_0 - M.$$

Воспользуемся ортогональностью системы функций (26) и вычислим значения  $b_n$  по формулам для коэффициентов Фурье:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^l (\theta_0 - M) \sin((n+1/2)\pi x/l) dx = -\frac{1}{l} (\theta_0 - M) \left[ \frac{l}{(n+1/2)\pi} \cos((n+1/2)\pi x/l) \right]_{x=0}^{x=l} = \frac{2(M - \theta_0)}{(n+1/2)\pi}.$$

Тогда искомое распределение температуры будет представлено в виде

$$\theta(x, t) = M + 2(M - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)} \sin((n+1/2)\pi x/l) \exp(-((n+1/2)\pi a/l)^2 t).$$

*Упражнение 3. Найти решение задачи нестационарной теплопроводности для стержня конечной длины при заданных начальном и граничных условиях и значении коэффициента температуропроводности. Вариант задания определяется последней цифрой номера зачетной книжки.*

$$3.1. \quad \theta(x,0)=19\sin 5\pi x; \quad \theta(0,t)=0, \quad \theta'_x(0,5;t)=0; \quad a^2=2.$$

$$3.2. \quad \theta(x,0)=8\cos \pi x; \quad \theta'_x(0,t)=0, \quad \theta(1,5;t)=0; \quad a^2=5.$$

$$3.3. \quad \theta(x,0)=17\sin 3\pi x; \quad \theta(0,t)=0, \quad \theta'_x(2,5;t)=0; \quad a^2=8.$$

$$3.4. \quad \theta(x,0)=6\cos 9\pi x; \quad \theta'_x(0,t)=0, \quad \theta(3,5;t)=0; \quad a^2=1.$$

$$3.5. \quad \theta(x,0)=15\sin 3\pi x; \quad \theta(0,t)=0, \quad \theta'_x(4,5;t)=0; \quad a^2=4.$$

$$3.6. \quad \theta(x,0)=5\sin 2\pi x-1+3x; \quad \theta(0,t)=-1, \quad \theta(2;t)=5; \quad a^2=9.$$

$$3.7. \quad \theta(x,0)=6\sin 3\pi x+2-3x; \quad \theta(0,t)=2, \quad \theta(3;t)=-7; \quad a^2=8.$$

$$3.8. \quad \theta(x,0)=7\sin 2\pi x-3+4x; \quad \theta(0,t)=-3, \quad \theta(1;t)=1; \quad a^2=7.$$

$$3.9. \quad \theta(x,0)=8\sin 4\pi x+4-5x; \quad \theta(0,t)=4, \quad \theta(2;t)=-6; \quad a^2=6.$$

$$3.10. \quad \theta(x,0)=9\sin 3\pi x-5+2x; \quad \theta(0,t)=-5, \quad \theta(3;t)=1; \quad a^2=5.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. — М.:Наука, 1967. — 444 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности.—М.: Высш.шк.,1967. — 599 с.
3. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
4. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969. — 288 с.

**МЕТОД ФУРЬЕ**  
**В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Методические указания и контрольные задания по курсу “Математика”  
для самостоятельной работы студентов

Составили: СЕРЕБРЯКОВ Андрей Владимирович  
ТРЕФИЛОВА Галина Максимовна

Рецензент